

## Przestrzenie euklidesowe

Zad. 1 Obliczyć kąt między wektorami  $u = [1, 1, 0]$  i  $v = [-1, 0, 1]$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ .

Zad. 2 Sprawdzić, czy trójkąt o wierzchołkach  $A = (3, -2, 5)$ ,  $B = (-2, 1, -3)$ ,  $C = (5, 1, -1)$  jest ostrokątny.

Zad. 3 Obliczyć pole powierzchni całkowitej oraz objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach  $[1, 0, 2]$ ,  $[2, 1, 4]$ ,  $[4, 2, 1]$  w przestrzeni trójwymiarowej  $\mathbb{R}^3$ .

Zad. 4 Obliczyć pole trójkąta ABC oraz objętość czworościanu ABCD, gdzie  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (0, 1, 2)$ ,  $C = (1, 2, 3)$ ,  $D = (2, 1, 3)$ .

Zad. 5 Niech  $\varphi: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie dane wzorem

$$\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = x_1 y_1 - 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3 - 4x_4 y_4.$$

Zbadać, czy  $\varphi$  jest iloczynem skalarnym.

Zad. 6 Niech

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \rightarrow 3x_1 y_1 + 2x_2 y_2 \in \mathbb{R}.$$

Zbadać, czy  $\varphi$  jest iloczynem skalarnym.

Zad. 7 Niech  $(V, \xi)$  będzie przestrzenią liniową euklidesową. Wykazać, że  $\xi(a, a) = \xi(b, b)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a + b \perp a - b$ . Zilustrować geometrycznie tę równoważność.

Zad. 8 Niech  $(V, \xi)$  będzie przestrzenią liniową euklidesową. Wykazać, że  $v \perp w$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Zilustrować geometrycznie tę równoważność.

Zad. 9 Niech  $(V, \xi)$  będzie przestrzenią liniową euklidesową. Wykazać, że dla dowolnych wektorów  $v, w \in V$  zachodzi równość

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

Zilustrować geometrycznie powyższą równość.

Zad. 10 W przestrzeni  $\mathbb{R}^4$ , ze standardowym iloczynem skalarnym, dane są wektory

$$u = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad v = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Wykazać, że wektory  $u$  i  $v$  są ortonormalne.

Niech

$$U = \text{lin}\{u, v\}.$$

Znaleźć dopełnienie prostopadłe  $U^\perp$  podprzestrzeni  $U$  w  $\mathbb{R}^4$ .

Zad. 11 Niech  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Rozważmy odwzorowanie

$$f: \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow (x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha) \in \mathbb{R}^2.$$

Sprawdzić, czy  $f$  jest izometrią, gdy w  $\mathbb{R}^2$  mamy standardowy iloczyn skalarny.

Zad. 12 W  $\mathbb{R}^3$  ze standardowym iloczynem skalarnym zortonormalizować metodą Grama - Schmidta bazę złożoną z wektorów  $u_1 = (2, 2, 1)$ ,  $u_2 = (1, 0, 1)$ ,  $u_3 = (1, 1, 2)$ .

Zad. 13 W przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^3$  dana jest baza złożona z trzech wektorów:

$$\vec{b}_1 = (1, -2, 2), \vec{b}_2 = (-1, 0, -1), \vec{b}_3 = (5, -3, -7).$$

Dokonaj ortonormalizacji tej bazy stosując procedurę Grama-Schmidta.

Zad. 14 Wyznaczyć bazę ortogonalną przestrzeni rozwiązań układu równań

a)  $3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$ ,  $x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0$

b)  $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$ ,  $x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0$ .

Zad. 15 Sprawdź, czy są diagonalizowalne macierze

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Zad. 16 Dane jest odwzorowanie liniowe

$$f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y, z) = (2x - y + 2z, 5x - 3y + 3z, -x - 2z).$$

Zbadaj, czy w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  istnieje baza, w której macierz odwzorowania  $f$  jest diagonalna.

Zad. 17 Czy podane endomorfizmy są diagonalizowalne?

a)  $\phi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ ,  $\phi(x, y) = (x, x + y)$

b)  $\phi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ ,  $\phi(x, y) = (-y, x)$

c)  $\phi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\phi(x, y, z) = (x, 2x + 2y, -x - y - z)$

d)  $\phi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\phi(x, y, z) = (x - z, 2y, x + z)$

e)  $\phi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\phi(x, y, z) = (3x - y, 6x - 2y, 2x - y + z)$ .

Zad. 18 Pokazać, że endomorfizm liniowy  $f$ , gdzie  $f(x_1, x_2) = (-x_1 + \sqrt{6}x_2, \sqrt{6}x_1 + 4x_2)$  jest samosprężony (symetryczny) w przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^2$  ze standardowym iloczynem skalarnym. Znaleźć bazę ortonormalną, w której ten endomorfizm ma macierz w postaci diagonalnej.